

Особенности динамики модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком

О. О. Решетова, email:tribunskih1993@mail.ru

Воронежский государственный университет

***Аннотация.** Аннотация. В работе исследуется модифицированное уравнение Ван-дер-Поля с гистерезисной нелинейностью, формализованной посредством оператора Прейзаха. Проведен сравнительный анализ динамики рассматриваемой системы с результатами моделирования классического осциллятора Ван-дер-Поля. Установлен ряд закономерностей, показывающий, что включение гистерезисного блока в левую часть уравнения Ван-дер-Поля позволяет описать значительное число динамических режимов, чем классический осциллятор Ван-дер-Поля.*

***Ключевые слова:** осциллятор Ван-дер-Поля, автоколебания, оператор Прейзаха.*

Введение

Осциллятор Ван-дер-Поля является позволяющий описать множество автоколебательных систем различной физической природы. Также на данный момент хорошо изучены некоторые модификации осциллятора, посредством которых описана динамика более сложных физических процессов, к примеру, модель Ван-дер-Поля–Дуффинга [1], в уравнении которой представлен дополнительный член с кубической нелинейностью, отвечающий за новый эффект в автономной системе – неизохронность колебаний, т.е. зависимость их периода от амплитуды. А также модель Бонхоффера–Ван-дер-Поля [2], которая легко реализуема в виде электронной схемы и в вариантах комбинированных схем, демонстрирующих сложную динамику, может служить основой для построения генераторов сигналов с широкими функциональными возможностями.

Отметим, что в нелинейных динамических систем особую роль играют явления гистерезисной природы, которые проявляются как на уровне отдельных блоков, так и на уровне управляющих воздействий. Изучению динамики систем с гистерезисом посвящено значительное количество работ. В следующих публикациях были рассмотрены нелинейные динамические системы, а также их отклик на гистерезисное воздействие [3-7]. Также при моделировании технических систем,

гистерезис проявляется в связи между динамическими характеристиками [8-10]. Ранее в работах [11-12] было рассмотрена динамика гистерезисно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, один из которых, находился под воздействием вынуждающей силы и гистерезисного воздействия, описанного феноменологической моделью Боука-Вена. Была установлена регуляризирующая роль гистерезисного звена в части редукции хаотических режимов.

В настоящей работе проводится сравнительный анализ модифицированного уравнения Ван-дер-Поля, в котором квадратичное слагаемое заменено гистерезисным блоком, формализованным посредством модели Прейзаха и классического осциллятора Ван-дер-Поля.

1. Сравнительный анализ динамики классического и модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля

Представим сравнительный анализ поведения классического осциллятора Ван-дер-Поля и модифицированного уравнения Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком. Запишем уравнение, которое является аналогом уравнения Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, включенным в левую часть

$$\ddot{x} - (\lambda - y^2(t))\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

где $y(t)$ – это выход преобразователя Прейзаха, определенный соотношением

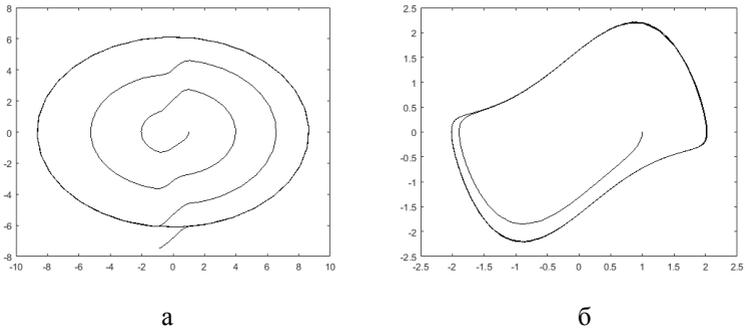
$$y(t) = y[t_0, \eta_0](t) = \int_{\Omega} R^{\omega} [t_0, \eta_0(\omega)] x(t) d\mu, t \geq t_0. \quad (2)$$

Классическое уравнение Ван-дер-Поля без учета внешнего воздействия запишем в следующем виде:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

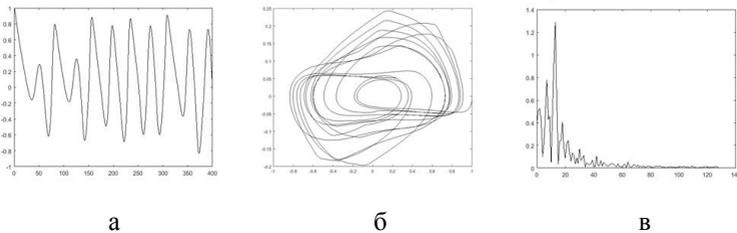
Приведем результаты численного моделирования решения уравнения (1) и (3) в зависимости от различных параметров λ и ω_0^2 . В отличие от поведения классического осциллятора Ван-дер-Поля, для которого характерно только периодическое движение с различной частотой и амплитудой, осциллятор, движение которого подчинено уравнению (1) демонстрирует несколько режимов поведения, в том числе, и резонансное движение. В случае если параметр $\lambda \geq 0.5$, а значения параметра $\omega_0^2 > 0.4$, то в осцилляторе (1), можно наблюдать колебания, близкие к гармоническим. При некоторых значениях параметров, эти колебания происходят с частотой, близкой к частоте

колебаний классического осциллятора Ван-дер-Поля. Однако в иных случаях (рис. 1), возможно появления более сложных режимов движения, с несколькими частотами. Отметим, что в случае, когда пороговые значения гистерезисного блока принадлежат интервалу от $[-1, 1]$, при значениях параметра $\lambda > 1$, то в системе (1) возникает резонанс. Для случаев, когда параметры принадлежат интервалам $\lambda < 0.5$ и $\omega_0^2 > 0.4$, в уравнении (1) наблюдаются колебания близкие как по частоте, так и амплитуде к колебаниям классического осциллятора Ван-дер-Поля.



а — для уравнения (1), *б* — для уравнения (3)

Рис. 1. Фазовые портреты при значениях параметров $\lambda = 1$ и $\omega_0^2 = 0.5$



а — решение уравнения (1), *б* — фазовый портрет уравнения (1), *в* — спектральная характеристика уравнения (1)

Рис. 2. Динамика модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля при значениях параметров $\lambda = 0.2$ и $\omega_0^2 = 0.04$

Как было отмечено выше, динамика модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля обладает рядом особенностей, отличающих его от классического. На рис.2 приведено решение, фазовый портрет и спектральная характеристика осциллятора (1) при значениях параметров $\lambda = 0.2$ и $\omega_0^2 = 0.04$. При $\omega_0^2 \leq 0.04$ в поведении осциллятора (1) возникают следующие закономерности: при очень небольших значениях $\lambda \leq 0.15$ с увеличением времени система стабилизируется в нуле, а в случае, когда $\lambda \in (0.15, 0.5)$ уравнению (1) соответствует сложная, не периодическая динамика осциллятора.

2. Численное исследование динамических режимов модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с учетом внешнего периодического воздействия

Далее рассмотрим модифицированный осциллятор Ван-дер-Поля, описанный при помощи уравнения

$$\ddot{x} - (\lambda - y^2(t))\dot{x} + \omega_0^2 x = B^* \cos(\omega t), \quad (4)$$

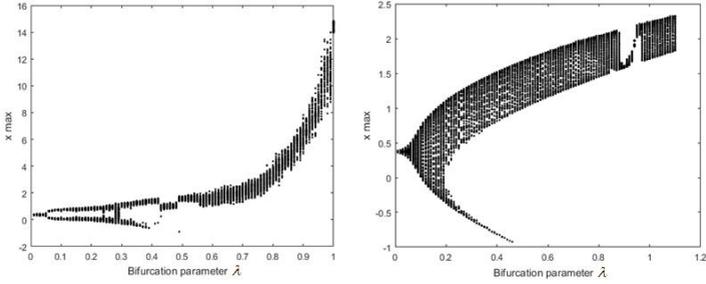
где, как и ранее, $y(t)$ – это выход преобразователя Прејзаха, определенный соотношением (2).

Для проведения сравнительного анализа запишем уравнение для классического осциллятора Ван-дер-Поля в виде:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = B^* \cos(\omega t). \quad (5)$$

В отличие от уравнений (1) и (3), уравнения (4) и (5) зависят от большего числа параметров, однако только при варьировании параметров λ и B^* наблюдаются существенные различия в динамике осцилляторов.

Для начала рассмотрим режимы поведения уравнений (4) и (5) при изменении параметра λ (рис.3). Отметим, что, как и в случае, рассмотренном в разделе 1, если $\lambda > 1$, то в уравнении (4) возникает резонанс. Однако, в отличие от уравнения (1) при малых значениях λ стабилизации около нуля не происходит. При этом, как и для случая, рассмотренного ранее, при небольших значениях $\lambda \leq 0.2$, амплитуда собственных колебаний осциллятора (4) близка к амплитуде колебаний классического осциллятора Ван-дер-Поля, находящегося под гармоническим воздействием.

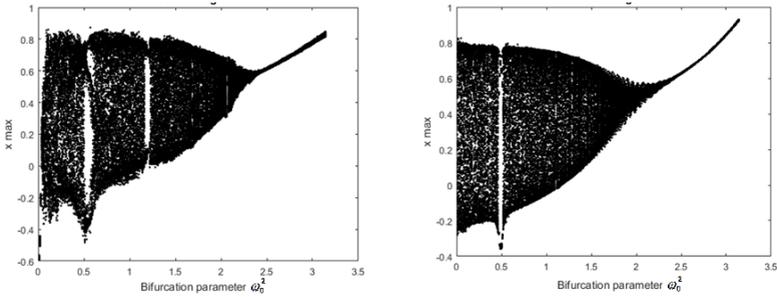


а б

а – для уравнения (4), б – для уравнения (5)

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра при значениях параметров $V^* = 1.2$, $\omega = 2.1$ и $\omega_0^2 = 1.2$

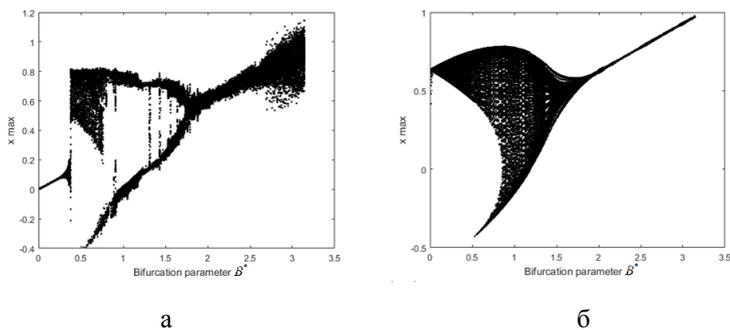
Бифуркационные диаграммы для уравнения (4) и (5) в зависимости от параметра ω_0^2 , демонстрируют, что поведение осциллятора в случае наличия гистерезисного блока, формализованного оператором ПреЙзаха, будет «близко» к поведению классического осциллятора Ван-дер-Поля, как по частоте, так и по амплитуде. Отметим, что, как и для случая с отсутствием гармонического внешнего воздействия, увеличение параметра ω_0^2 позволяет регулировать поведение осцилляторов.



а б

а – для уравнения (4), б – для уравнения (5)

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра ω_0^2 при значениях параметров $\lambda = 0.1$, $\omega = 1.2$ и $V^* = 1.2$



а – для уравнения (4), б – для уравнения (5)

Рис. 5. Бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра B^* при значениях параметров $\lambda = 0.1$, $\omega = 1.2$ и $\omega_0^2 = 1.2$

Бифуркационная диаграмма в зависимости от амплитуды внешнего воздействия B^* на осциллятор (4) и (5) представлена на рис. 5. Из приведенного графика, следует, что собственная амплитуда колебаний в уравнениях (4) и (5) будет близка, однако характер движения осцилляторов значительно отличается.

Заключение

В работе исследована модель модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля с гистерезисным блоком, формализованным при помощи оператора Прейзаха. При проведении сравнительного анализа модифицированного и классического осцилляторов Ван-дер-Поля в условиях отсутствия внешнего воздействия, было установлено, что наличие гистерезисного блока в левой части уравнения, приводит к возникновению хаотических колебаний в автономной системе второго порядка. Также было установлено, что в зависимости от управляющего параметра, возможно возникновение резонанса, а также при малых значениях происходит стабилизация колебаний около нуля.

Сравнение результатов моделирования для осцилляторов, находящихся под воздействием внешней силы, показало, что при определенных параметрах поведение модифицированного осциллятора Ван-дер-Поля близко к классическому осциллятору, как по частоте, так и по амплитуде колебаний. Однако при варьировании параметров и в динамике осцилляторов наблюдаются существенные различия, связанные с резонансными свойствами модифицированного уравнения Ван-дер-Поля.

Литература

1. Kuznetsov, A. P. Coupled van der pol and van der pol–duffing oscillators: dynamics of phase and computer simulation / A.P. Kuznetsov, N.V. Stankevich, L.V. Turukina // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. –2008. – V. 16(4). – P. 101-136.
2. Ланда, П.С. Нелинейные колебания и волны / П. С. Ланда. – Москва: Наука, 1997. – 495 с.
3. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления / А.Л. Медведский [и др.] // *Изв. РАН. ТиСУ*. –2020. – №4. –С. 58–82.
4. Oscillations Under Hysteretic Conditions: From Simple Oscillator to Discrete Sine-Gordon Model / M.E. Semenov [and all] // in *Topics in Nonlinear Mechanics and Physics*, Singapore: Springer. – 2019. – V. 228. – P.229-253.
5. Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems / M.E. Semenov [and all] // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. – 2020. – V. 15. – P. 43.
6. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами/ С.В. Борзунов [и др.] // *Математическое моделирование*. – 2019. – №7. – С.109–126.
7. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete sine-gordon model / M.E. Semenov [and all] // *Topics in Nonlinear Mechanics and Physics, Springer Proceedings in Physics*. – 2019. – P. 229-253.
8. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского / М.Е. Семёнов [и др.] // *Мехатроника, автоматизация, управление*. –2019. – Т. 20. – № 2. – С. 106-113.
9. Coupled inverted pendulums: stabilization problem / M.E. Semenov [and all] // *Archive of Applied Mechanics*. –2018. –V. 4. – P. 517-524.
10. Carboni, B. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems / B. Carboni, W. Lacarbonara, P. Brewick, S. Masri // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2018. – V. 29. – P. 2795-2810.
11. The van der Pol oscillator under hysteretic control: regular and chaotic dynamics / M.E. Semenov [and all] // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – V. 1368. – P. 042030 (8 pp.).
12. Семенов, М. Е. Неограниченные и диссипативные колебания в системах с релейными нелинейностями / М. Е. Семенов, П. А. Мелешенко, О. О. Решетова // *Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика*. – 2018. – № 3. – С. 158-171.